1　可測基数が到達不可能であること

可測基数 κ は到達不可能です。到達不可能基数とは (1),(2) を満たす基数のことでした。

$$\text{正則な極限基数である} \tag{1}$$
$$\text{強極限である。すなわち } \forall\lambda(\lambda < \kappa \to 2^\lambda < \kappa) \text{ を満たす。} \tag{2}$$

ここで簡単な注意ですが、カントールの定理により、基数が強極限であれば極限基数となることは明白なので、基数の到達不可能性の証明には (2) を示せば (1) の部分は正則性のみを証明すれば十分です。

まず準備としてフィルターの概念の双対であるイデアルの定義を行います。

定義 1.1 (イデアル). 集合 X に対し $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ が次の条件を満たすときイデアルと言います。

$$\begin{gathered} X \notin \mathcal{I} \\ Y \in \mathcal{I} \wedge Z \subset Y \to Z \in \mathcal{I} \\ J \subset \mathcal{I} \wedge (J \text{ は有限集合}) \to \bigcup J \in \mathcal{I} \end{gathered} \tag{3}$$

$\mathcal{F}$ が X 上のフィルターの場合 $\mathcal{I} = \{X - Y | Y \in \mathcal{F}\}$ は X 上のイデアルとなります。超フィルターの場合同様に、あるイデアルを含む極大なイデアルの存在も簡単に証明でき、このようなイデアルを素イデアル (prime ideal) と称します。また主イデアル (principal ideal)、κ-完備イデアルと同様に定義します。

定理 1.1. 可測基数 κ は到達不可能である。

証明. κ を可測基数として $\mathcal{I}$ をその上の nonprincipal κ-完備素イデアルとします。このとき次の事実が成立します。

$$\forall x \in X(\{x\} \in \mathcal{I}) \tag{4}$$
$$\forall Y \subset X(|Y| < \kappa \to Y \in \mathcal{I}) \tag{5}$$

(4) は $\mathcal{I}$ が nonprincipal かつ素であることから得られます。(5) は (4) と $\mathcal{I}$ がκ-完備であることからの帰結です。従ってもし κ が特異基数とすると $\kappa \in \mathcal{I}$ となり矛盾です。

次に κ が強極限であることの証明ですが、もし κ が強極限でないと仮定すると $\lambda < \kappa, \kappa \leq 2^\lambda$ なる λ が存在します。すなわち $Y \subset 2^\lambda, |Y| = \kappa$ なる集合が存在し Y 上にκ-完備 nonprincipal 超フィルター $\mathcal{F}$ が存在することになります。Y の要素は λ から 2 への関数と考えられるので、各 $\alpha \in \lambda$ に対して

$$\begin{gathered} A_\alpha = \{f \in Y | f(\alpha) = 0\} \\ B_\alpha = \{f \in Y | f(\alpha) = 1\} \end{gathered}$$

とおきます。ところが $\mathcal{F}$ が超フィルターということから、A_α, B_α のいずれかは $\mathcal{F}$ の要素となります。そこで A_α, B_α の一方で $\mathcal{F}$ の要素となる方を C_α と命名するとこんどは $\mathcal{F}$ がκ-完備であることから

$$D = \bigcap_{\alpha \in \lambda} C_\alpha \in \mathcal{F}$$

が成立しますが、D は確定した関数からなる一つの要素しか含まないので、$\mathcal{F}$ が nonprincipal であることに矛盾します。 □